Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Friedrichs-Gymnasiums zu Berlin. Ostern 1895.

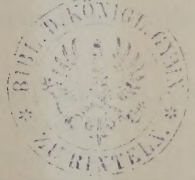
Reihenentwicklungen mit Hülfe arithmetischer Progressionen höherer Ordnung.

Beitrag zum mathematischen Unterrichte an höheren Lehranstalten.

Von

Prof. Dr. Eduard Fischer.

Mit 3 Figuren.



BERLIN 1895.
R. Gaertners Verlagsbuchhandlung
Hermann Heyfelder.

1895. Programm No. 54.

Reihenentwicklungen mit Hülfe mathematischer Progressionen höherer Ordnung.

Von den Resultaten der Kombinatorik ausgehend, kann man bekanntlich sowohl die Summation der arithmetischen Reihen höherer Ordnung ausführen, als auch den binomischen Lehrsatz für ganze positive Exponenten entwickeln. Vergleiche unter andern meinen „Systematischen Grundrifs der Elementar-Mathematik. Berlin 1891. Algebra §§ 85 und 86. Auch die folgenden Untersuchungen schliefsen sich vielfach an denselben an.

Die Übereinstimmung der Koeffizienten des binomischen Lehrsatzes mit denen der Summenformel der arithmetischen Reihen läfst einen engeren Zusammenhang zwischen beiden und einen Weg, der direkt von den arithmetischen Reihen zu jenem Satze führt, vermuten. Dieser Weg soll im folgenden nachgewiesen werden.

Es zeigt sich, dafs die dabei befolgte Methode auch zu einem strengen Beweise des Binomial-Satzes für negative und gebrochene Exponenten und zu einer Reihenentwicklung aller in den höheren Lehranstalten behandelten transscendenten Zahlen führt, ohne das Imaginäre einführen zu müssen.

Der Schüler sieht, dafs er dieselben berechnen und als selbständiges geistiges Eigentum behandeln kann. Im Besitze dieser Reihen kann man ferner eine strengere Definition der Potenzen mit imaginären Exponenten und eine logische Entwicklung ihrer Eigenschaften geben.

Durch eine einfache Verallgemeinerung der besondern Entwicklungen gelangt man sogar zur Taylorschen und Maclaurinschen Formel und gewinnt dadurch einen natürlichen Anschlufs an die höhere Analysis.

§ 1. Der binomische Lehrsatz für Potenzen mit positiven, ganzen Exponenten.

Hülfssatz. Die Differenz zweier Potenzen mit demselben positiven, ganzzahligen Exponenten p, deren Grundzahlen $(a+\delta)$ und a sich nur um die verschwindend kleine Gröfse δ unterscheiden, ist gleich dem pfachen Produkte aus δ und der $p-1$ten Potenz von a:

$$(a+\delta)^p - a^p = \delta p a^{p-1}. \qquad (1)$$

Beweis. Da die Differenz zweier Potenzen mit demselben Exponenten stets durch die Differenz ihrer Basen teilbar ist, erhält man:

$$(a+\delta)^p - a^p = \delta\{(a+\delta)^{p-1} + (a+\delta)^{p-2}a + (a+\delta)^{p-3}a^2 + \ldots\ldots + a^{p-1}\}$$

Ist nun δ eine verschwindend kleine Gröfse, so fällt bis auf jeden beliebigen Grad der Genauigkeit $a+\delta$ mit a zusammen. Aber auch jede endliche Potenz von $a+\delta$ geht in die gleich hohe von a über, da auch jedes Vielfache von δ und umsomehr seiner höheren Potenzen unter jeden angebbaren Wert sinken kann. In der obigen Gleichung nehmen daher sämtliche Glieder der Klammer auf der rechten Seite den Wert a^{p-1} an, und es ergiebt sich, da die Anzahl der Summanden gleich p ist, in der That:

$$(a+\delta)^p - a^p = \delta\, p\, a^{p-1}.$$

Der binomische Lehrsatz. Der Binomial-Satz hat die Aufgabe, die allgemeine pte Potenz eines Binomes $a+b$ in eine nach Potenzen von a bezw. b fortschreitende Reihe zu entwickeln.

Man teile das eine Glied des Binomes z. B. b in eine unermefslich grofse Anzahl von n gleichen Stücken, deren jedes $\frac{b}{n} = \delta$ unermefslich klein ist. Man kann dann die identisch richtige Gleichung ansetzen:

$$\begin{aligned} -a^p + (a+b)^p = &-a^p + (a+\delta)^p - (a+\delta)^p + (a+2\delta)^p - (a+2\delta)^p + (a+3\delta)^p - \ldots. \\ &+ (a+(n-1)\delta)^p - (a+(n-1)\delta)^p + (a+b)^p. \end{aligned}$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung liegt auf der Hand, da die beiden Glieder der linken Seite sich gegen die gleichen der rechten fortheben und die übrigen Summanden der letzteren paarweis verschwinden. Vereinigt man aber nach dem Hülfssatze (1) die Potenzen rechts so, dafs jede positive mit der vorhergehenden negativen zusammengefafst wird, so folgt:

$$\begin{aligned} -a^p + (a+b)^p = &\delta\, p\, a^{p-1} + \delta\, p\,(a+\delta)^{p-1} + \delta\, p\,(a+2\delta)^{p-1} + \delta\, p\,(a+3\delta)^{p-1} \\ &+ \ldots \delta\, p\,\{a + (n-1)\delta\}^{p-1}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Auf diese Weise ist die rechte Seite in eine Summe von n Gliedern verwandelt, welche die Inkremente darstellen, um welche a^p allmählich bis auf $(a+b)^p$ anwächst, wenn die Basis a, schrittweis um δ zunehmend, bis zu $a+b$ ansteigt. Die Reihe dieser Inkremente ist zu addieren. Um festzustellen, ob dieselbe eine arithmetische Reihe ist, bilde man die ersten Differenzen. Nach (1) sind dieselben:

$$\delta^2 p\,(p-1)\,a^{p-2},\ \delta^2 p\,(p-1)\,(a+\delta)^{p-2},\ \delta^2 p\,(p-1)\,(a+2\delta)^{p-2},\ \ldots\ \delta^2 p\,(p-1)\,\{a+(n-2)\delta\}^{p-2}.$$

Die zweite Differenzenreihe wird die folgende:

$$\begin{aligned} &\delta^3 p\,(p-1)\,(p-2)\,a^{p-3},\ \delta^3 p\,(p-1)\,(p-2)\,(a+\delta)^{p-3},\ \delta^3 p\,(p-1)\,(p-2)\,(a+2\delta)^{p-3},\ \ldots \\ &\delta^3 p\,(p-1)\,(p-2)\,\{a+(n-3)\delta\}^{p-3}. \end{aligned}$$

Da in jeder der aufeinander folgenden Differenzenreihen die Exponenten der Potenzen von a, $a+\delta$ u. s. w. stets um 1 kleiner werden, werden sie in den p—1ten Differenzen gleich 0, letztere also konstant gleich $\delta^p p!$. Die folgenden Differenzenreihen verschwinden.

Die Reihe (2) ist somit eine arithmetische Progression p—1ter Ordnung von n Gliedern, so dafs sich ergiebt:

$$-a^p + (a+b)^p = n\delta p a^{p-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\delta^2 p(p-1)a^{p-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\delta^3 p(p-1)(p-2)a^{p-3} + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{p!}\delta^p p!$$

Nun ist aber:

$$n\delta = n\frac{b}{n} = b, \quad \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\delta^2 = \frac{1-\frac{1}{n}}{1\cdot 2}b^2 = \frac{b^2}{1\cdot 2}.$$

denn $\frac{1}{n} = 0$, weil $n = \infty$ ist. Ebenso wird:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\delta^3 = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{b^3}{3!} = \frac{b^3}{3!} \text{ u. s. w.}$$

bis das letzte, pte, Glied gleich b^p wird. Nach Einsetzen dieser Werte ergiebt sich der binomische Lehrsatz für positive ganzzahlige Exponenten:

$$(a+b)^p = a^p + pa^{p-1}b + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}a^{p-2}b^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{p-3}b^3 + \ldots + b^p. \quad (3)$$

Die Koeffizienten der rechten Seite, Binomial-Koeffizienten genannt, erhalten zunächst im Zähler und Nenner eine gröfsere Anzahl von Faktoren. Dieselbe nimmt aber von der Mitte der Entwicklung wieder ab, da die zunehmenden Faktoren im Nenner und die abnehmenden im Zähler sich wieder fortheben, so dafs die Koeffizienten sich in umgekehrter Reihenfolge wiederholen. Dafs übrigens die gleichweit von den Enden entfernten Glieder dieselben Koeffizienten haben, geht auch daraus hervor, dafs, wenn $(b+a)^p$ nach Potenzen von b entwickelt wird, indem man $\frac{a}{n} = \delta$ substituiert, sich dasselbe Resultat ergeben mufs.

Wenn man in (3) noch sämtliche Glieder mit p! dividiert, ergiebt sich folgende wichtige Gleichung:

$$\frac{(a+b)^p}{p!} = \frac{a^p}{p!} + \frac{a^{p-1}}{(p-1)!}\frac{b}{p!} + \frac{a^{p-2}}{(p-2)!}\frac{b^2}{2!} + \ldots + \frac{a}{1!}\frac{b^{p-1}}{(p-1)!} + \frac{b^p}{p!} \quad (4)$$

§ 2. Der binomische Lehrsatz bleibt für beliebig hohe Werte von p richtig, da für dieselben auch Hülfssatz (1) § 1 gültig bleibt. Es kann nämlich, auch bei beliebig hohen p, der Nenner n immer so grofs angenommen werden, dafs $p\cdot\delta = \frac{p}{n}\cdot b$ verschwindet, sich somit $(a+\delta)^{p-1}$ um nichts von a^{p-1} unterscheidet. Allerdings dehnt sich mit endlos wachsendem p die Gliederzahl $p+1$ der Binomialreihe ebenfalls in das Endlose aus, so dafs dieselbe auf ihre Konvergenz zu untersuchen ist. Die ausreichenden Kriterien einer

solchen sind § 76 meiner Algebra zusammengestellt. Setzt man in einem besonderen Falle $a = 1$, $b = \frac{1}{p}$, so liefert (3) § 1:

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)^p = 1 + p\cdot\frac{1}{p} + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{p^3} + \ldots$$

Läfst man nun p in das Unendliche wachsen, so wird:

$$p\cdot\frac{1}{p} = 1, \quad \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{p^2} = \frac{1}{2!}, \quad \frac{p(p-1)(p-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{p^3} = \frac{1}{3!} \text{ u. s. w.}$$

Bezeichnet man also den Wert der rechten Seite für $p = \infty$ mit e, so ergiebt sich:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \text{ in inf.} \qquad (1)$$

$$= 2{,}7182818284 \ldots\ldots\ldots \text{ in inf.}$$

Obwohl also $1 + \frac{1}{p} = 1$ wird, wenn p in das Unendliche wächst, bleibt, bei dem angenommenen Verhältnis des Exponenten p zur Basis $1 + \frac{1}{p}$, die pte Potenz von $1 + \frac{1}{p}$ nicht gleich 1, sondern nimmt obigen Wert an.

§ 3. Die Summe der pten Potenzen der ganzen Zahlen.

Die Summe der Quadrate der ganzen Zahlen läfst sich bekanntlich mit Hülfe der arithmetischen Reihen zweiter Ordnung berechnen, da die Glieder der zweiten Differenzenreihe konstant und zwar gleich 2! sind. Denn das mte Glied der ersten Differenzenreihe wird:

$$(m+1)^2 - m^2 = 2m + 1,$$

und dasselbe Glied der zweiten:

$$2(m+1) + 1 - 2m - 1 = 2!$$

Entsprechend besteht die dritte Differenzenreihe der Summe der Kubikzahlen aus konstanten Gliedern, deren jedes 3! ist. Das mte Glied der ersten Differenzenreihen ist nämlich:

$$(m+1)^3 - m^3 = 3m^2 + 3m + 1.$$

Die mte Differenz der folgenden Reihe wird:

$$3(m+1)^2 + 3(m+1) + 1 - 3m^2 - 3m - 1 = 3!m + 6,$$

daher alle dritten Differenzen:

$$3!(m+1) + 6 - 3!m - 6 = 3!$$

Allgemein gilt der Satz: Die pte Differenzenreihe der pten Potenzen der ganzen Zahlen ist konstant gleich p!.

Beweis. Wenn für irgend einen Wert von p die pten Differenzen in der Summe der pten Potenzen der ganzen Zahlen konstant und gleich p! werden, während die Differenzen für die niedrigeren Potenzen nach einander schon früher verschwinden, so sind auch die p + 1ten Differenzen der p + 1ten Potenzen konstant und gleich (p+1)!. Denn nach dem binomischen Lehrsatze ist das mte Glied der ersten Differenzenreihe der (p+1)ten Potenzen das folgende:

$$(m+1)^{p+1} - m^{p+1} = (p+1)\left\{ m^p + \frac{p}{2!} m^{p-1} + \frac{p(p-1)}{3!} m^{p-2} + \ldots + m + \frac{1}{p+1} \right\}$$

Bildet man die weiteren p Differenzenreihen, so besteht nach der Voraussetzung die letzte, aus m^p hervorgehende, aus konstanten Gliedern, deren jedes gleich p! ist. Die p + 1te Differenzenreihe der p + 1ten Potenzen setzt sich also aus den konstanten Gliedern:

$$(p+1)\,p! = (p+1)!$$

zusammen.

Da nun dies Gesetz für die dritten Potenzen gilt, gilt es auch für die vierten, fünften u. s. w., d. h. für jede beliebige Potenz.

Damit ist bewiesen, dafs die Summen der pten Potenzen der ganzen Zahlen sich mittels der arithmetischen Progressionen pter Ordnung als Funktionen p + 1ten Grades der Gliederzahl n darstellen lassen.

§ 4. Der binomische Lehrsatz für negative ganzzahlige Exponenten.

Während in den wirklichen Potenzen, ihrer Definition entsprechend, der Exponent stets eine ganze positive Zahl sein mufs, kann man die reziproken Werte der wirklichen Potenzen in der Form von Potenzen mit negativen Exponenten schreiben, weil man mit diesen symbolischen Ausdrücken wie mit wirklichen Potenzen rechnen kann. Eine eigentliche Erweiterung des logischen Begriffes einer Potenz hat aber dabei nicht stattgefunden, indem man unter a^{-n} immer den Bruch $\frac{1}{a^n}$ zu verstehen hat und nur unter dieser Voraussetzung auf a^{-n} die Potenzregeln anwenden darf.

Es entsteht nun die Frage, ob auch das Gesetz der Entwicklung des binomischen Lehrsatzes auf Potenzen von Binomen mit negativen Exponenten angewandt werden kann.

Hülfssatz. Die Differenz zweier Potenzen mit denselben negativen ganzzahligen Exponenten —p, deren Grundzahlen sich nur um eine verschwindend kleine Gröfse δ von einander unterscheiden, ist gleich dem —pfachen Produkte aus δ und der —p—1ten Potenz der Basis:

$$(a+\delta)^{-p} - a^{-p} = -p\,\delta\,a^{-p-1}. \qquad (1)$$

Beweis:

$$(a+\delta)^{-p} - a^{-p} = \frac{1}{(a+\delta)^p} - \frac{1}{a^p} = \frac{a^p - (a+\delta)^p}{(a+\delta)^p\ a^p} = \frac{-p\,\delta\,a^{p-1}}{a^{2p}} = -p\,\delta\,a^{-p-1}.$$

Die Richtigkeit des Hülfssatzes (1) § 1 ist somit auch für negative Exponenten dargethan. Es wird also der Beweis des binomischen Lehrsatzes, der sich auf diesen Hülfssatz stützt, in gleicher Weise auch für Potenzen mit negativen Exponenten durchgeführt.

Allerdings zeigt die Entwickelung einen wesentlichen Unterschied. Da nämlich die Exponenten in den verschiedenen Differenzenreihen sich immer mehr von 0 entfernen, die Differenzen also selbst nie verschwinden können, so wird die zu addierende Summe (2) § 1 eine arithmetische Progression unendlicher Ordnung, deren Wert selbst in Form einer unendlichen Reihe erscheint. Dieselbe ist daher vor ihrer Benutzung auf ihre Konvergenz zu untersuchen.

Da die Summationsformel der arithmetischen Progressionen für beliebig hohe Ordnungen derselben gültig bleibt, darf man sich nicht scheuen, dieselbe beliebig weit, selbst bis in das Unendliche auszudehnen. Dafs man hier auf solche Reihen geführt wird, liegt nicht an der Methode, sondern ist in der Natur der Sache begründet. Das Unendliche tritt uns eben überall unabweisbar entgegen, schon in der ewigen Zeit, in dem nach allen Richtungen sich in das Unermefsliche erstreckenden Raume, in der nie abbrechenden Zahlenreihe.

Mit Hülfe der folgenden Auffassung könnte man sich übrigens auf endliche Resultate beschränken. Wird die unendliche Reihe, welche sich für $(a+b)^{-p}$ ergiebt, und welche nur im Falle der Konvergenz Berechtigung hat, bei irgend einem Gliede abgebrochen, indem alle folgenden als für die Genauigkeit der Rechnung verschwindend angesehen werden können, so lassen sich auch die entsprechenden Differenzenreihen in gleicher Weise als verschwindend betrachten, und die arithmetische Progression unendlicher Ordnung wird auf eine solche endlicher Ordnung zurückgeführt.

§ 5. Der binomische Lehrsatz für gebrochene Exponenten.

Auch Wurzelgröfsen lassen sich in der Form von Potenzen schreiben. Wenn man $\sqrt[n]{a^m}$ in die Form der symbolischen Potenz $a^{\frac{m}{n}}$ bringt, kann man mit diesen uneigentlichen Potenzen wie mit wirklichen rechnen. Es bleibt noch zu beweisen, dafs auch die Entwicklung des binomischen Lehrsatzes für diese gebrochenen Exponenten unter der gemachten Voraussetzung ein richtiges Resultat liefert. Zunächst kann dargethan werden, dafs der Hülfssatz (1) § 1 gültig bleibt, auch wenn der Potenzexponent ein Bruch ist.

Hülfssatz:

$$(a+\delta)^{\frac{p}{q}} - a^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q}\,\delta\, a^{\frac{p}{q}-1}. \qquad (1)$$

Beweis.

$$(a+\delta)^{\frac{p}{q}} - a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a+\delta)^p} - \sqrt[q]{a^p}\,.$$

Man erweitere letztere Differenz mit:

$$\sqrt[q]{(a+\delta)^{p\,q-1}} + \sqrt[q]{(a+\delta)^{p\,q-2}}\,\sqrt[q]{a^p} + \sqrt[q]{(a+\delta)^{p\,q-3}}\,\sqrt[q]{a^{p\,2}} + \sqrt[q]{(a+\delta)^{p\,q-4}}\,\sqrt[p]{a^{q\,3}} + \ldots$$

$$\ldots + \sqrt[q]{(a+\delta)^p}\,\sqrt[q]{a^{p\,p-2}} + \sqrt[q]{a^{p\,q-1}}.$$

Es ergiebt sich ein Bruch, dessen Zähler nach einer bekannten Potenzformel die Form annimmt:

$$\sqrt[q]{(a+\delta)^{p\,q}} - \sqrt[q]{a^{p\,q}} = (a+\delta)^p - a^p,$$

während die obige Summe im Nenner stehen bleibt. Beachtet man aber, dafs unter δ eine verschwindend kleine Gröfse vorausgesetzt wird, welche man unter jeden noch so kleinen Wert sinken lassen kann, so geht selbst für bedeutende Exponenten p die Potenz $(a+\delta)^p$ in a^p über. Dadurch werden aber die q Summanden im Nenner der rechten Seite einander gleich und reduzieren sich sämtlich auf $\sqrt[q]{a^{p(q-1)}}$.

Man erhält also:

$$(a+\delta)^{\frac{p}{q}} - a^{\frac{p}{q}} = (a+\delta)^p - a^p : \sqrt[q]{a^{p(q-1)}}.$$

Mihin nach (1) § 1:

$$(a+\delta)^{\frac{p}{q}} - a^{\frac{p}{q}} = \frac{\delta p\, a^{p-1}}{\sqrt[q]{a^{p(q-1)}}} = \frac{\delta p\, a^{p-1}}{q a^{p-\frac{p}{q}}} = \frac{p}{q}\delta a^{p-1-p+\frac{p}{q}},$$

oder schliefslich:

$$(a+\delta)^{\frac{p}{q}} - a^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q}\delta a^{\frac{p}{q}-1}.$$

In wesentlich gleicher Weise läfst sich die Richtigkeit des Hülfssatzes auch für negative gebrochene Exponenten darthun.

Auf Grund von (1) läfst sich nun der Beweis des binomischen Lehrsatzes auch für gebrochene Exponenten ganz analog dem § 1 führen. Es gelten aber auch für diesen Fall die Betrachtungen, welche bei den Potenzen mit negativen Exponenten durchgeführt sind. Insbesondere liefert die Entwicklung eine unendliche Reihe, welche jedesmal auf ihre Konvergenz zu untersuchen ist.

Der Binomial-Satz ist ferner auch für Exponenten mit beliebig vielen, daher auch unendlich vielen Dezimalstellen gültig, kann daher bei jedem beliebigen reellen Exponenten angewandt werden.

§ 6. Logarithmische Reihen.

Es war bereits § 2 (1) eine Reihe für die Zahl e aufgestellt. Aus § 4 und § 5 ergiebt sich nun weiter eine Reihe für e^α, wenn α eine beliebige reelle Zahl ist. Unter der Voraussetzung, dafs p unendlich wird, erhält man:

$$e^\alpha = \left(1+\frac{1}{p}\right)^{p\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4:} + \ldots \text{ in inf.} \qquad (1)$$

Diese Reihe ist für jeden Wert von α konvergent.

Für $\left(1+\frac{\alpha}{p}\right)^p$ erhält man aber, wenn $p=\infty$ wird, nach dem Binomial-Satze dieselbe Reihe. Daraus folgt das merkwürdige Resultat:

$$e^\alpha = \left(1+\frac{\alpha}{p}\right)^p, \text{ wenn } p=\infty. \qquad (2)$$

Die Potenz e^{α} kann mithin in einen algebraischen Ausdruck verwandelt werden, welcher den Exponenten α in der Reihe der gewöhnlichen Zahlen enthält, so dafs sich α aus dem Werte der Potenz berechnen läfst. Dadurch ist e besonders geeignet, als Basis für Logarithmen zu dienen, und man versteht unter dem natürlichen Logarithmus einer Zahl a, geschrieben la, den Exponenten derjenigen Potenz von e, welche gleich a ist, d. h.:

$$a = e^{la}$$

oder nach (2):

$$a = \left(1 + \frac{la}{p}\right)^{p},$$

mithin:

$$la = \frac{a^{\frac{1}{p}} - 1}{\frac{1}{p}}, \text{ wenn } p = \infty \text{ ist.}$$

Aus dieser Gleichung läfst sich, nachdem für a das Binom $1 + b$ substituiert ist, die bekannte unendliche Reihe für $l(1+b)$ herleiten.

Dieselbe kann aber auch auf folgendem, den Entwicklungen der vorigen Paragraphen analogen, Wege erhalten werden.

Hülfssatz. Die Differenz zweier natürlichen Logarithmen, deren Numeri sich nur durch eine verschwindend kleine Gröfse δ unterscheiden, ist gleich δ, dividiert durch den Numerus, oder:

$$l(a+\delta) - la = \frac{\delta}{a}. \tag{1}$$

Beweis:

$$l(a+\delta) - la = l\left(\frac{a+\delta}{a}\right) = l\left(1 + \frac{\delta}{a}\right).$$

Bezeichnet man den letzten Logarithmus mit z, so ist:

$$e^{z} = 1 + \frac{\delta}{a},$$

oder nach Formel (1):

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \text{ in inf.} = 1 + \frac{\delta}{a},$$

daher:

$$z\left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \ldots \text{ in inf.}\right) = \frac{\delta}{a}.$$

Nun soll aber $\frac{\delta}{a}$ unendlich klein sein, mithin auch die linke Seite dieser Gleichung. Die Summe in der Klammer ist aber, so lange $\frac{\delta}{a}$ positiv bleibt, stets gröfser als 1, daher mufs der andere Faktor z unendlich klein werden. Dadurch wird aber die Klammer gleich 1, und man erhält:

$$z = l(a+\delta) - la = \frac{\delta}{a}.$$

Reihe für $l(1+b)$.

Teilt man b in eine unermefslich grofse Anzahl von n Teilen, deren jeder $\frac{b}{n} = \delta$ sein mag, so läfst sich wieder die identisch richtige Gleichung ansetzen:

$$-l1 + l(1+b) = -l1 + l(1+\delta) - l(1+\delta) + l(1+2\delta) - l(1+2\delta) + l(1+3\delta) + \ldots$$
$$+ l(1+(n-1)\delta) - l(1+(n-1)\delta) + l(1+b).$$

Nach dem Hülfssatze (1) erhält man aber, wenn das erste und zweite, dritte und vierte Glied u. s. w. zusammengezogen wird, da l1 den Wert 0 hat:

$$l(1+b) = \frac{\delta}{1} + \frac{\delta}{1+\delta} + \frac{\delta}{1+2\delta} + \frac{\delta}{1+3\delta} + \ldots + \frac{\delta}{1+(n-1)\delta}.$$

Diese Reihe von n Gliedern, welche aus den Inkrementen besteht, aus denen $l(1+b)$ sich aufbaut, wenn der Numerus stufenweise um δ von 1 bis $1+b$ wächst, ist zu addieren. Man kann dieselbe schreiben:

$$l(1+b) = \delta\, 1^{-1} + \delta\,(1+\delta)^{-1} + \delta\,(1+2\delta)^{-1} + \delta\,(1+3\delta)^{-1} + \ldots + \delta\,(1+(n-1))\delta^{-1}.$$

Bildet man zunächst die Unterschiede der auf einander folgenden Glieder, so ergiebt sich nach (1) § 4 als erste Differenzenreihe:

$$-\delta^2\, 1^{-2}, \quad -\delta^2\,(1+\delta)^{-2}, \quad -\delta^2\,(1+2\delta)^{-2}, \quad -\delta^2\,(1+3\delta)^{-2}, \ldots$$

Die zweite Differenzenreihe nimmt folgende Gestalt an:

$$+2\delta^3\, 1^{-3}, \quad +2\delta^3\,(1+\delta)^{-3}, \quad +2\delta^3\,(1+2\delta)^{-3}, \quad +2\delta^3\,(1+3\delta)^{-3}, +\ldots$$

Die dritte:

$$-2\cdot3\delta^4\, 1^{-4}, \quad -2\cdot3\delta^4\,(1+\delta)^{-4}, \quad -2\cdot3\delta^4\,(1+2\delta)^{-4}, \quad -2\cdot3\delta^4\,(1+3\delta)^{-4}, -\ldots$$

Die vierte:

$$+2\cdot3\cdot4\delta^5\, 1^{-5}, \quad +2\cdot3\cdot4\delta^5\,(1+\delta)^{-5}, \quad +2\cdot3\cdot4\delta^5\,(1+2\delta)^{-5}, +\ldots \text{ u. s. w.}$$

Man erhält auch in diesem Falle eine arithmetische Progression unendlicher Ordnung, deren Differenzen unendlich schnell kleiner werden. Der gesuchte Wert von $l(1+b)$ erscheint also selbst in Form einer unendlichen Reihe, welche nur im Falle ihrer Konvergenz angewandt werden kann. Man erhält:

$$l(1+b) = n\delta - \frac{n(n-1)}{1\cdot2}\delta^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}2\delta^3 - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}2\cdot3\delta^4 + \ldots \text{ in inf.}$$

Nun ist aber:

$$n\delta = n\frac{b}{n} = b, \quad -\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\delta^2 = -\frac{b^2}{2}, \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}2\delta^3 = \frac{b^3}{3},$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}2\cdot3\delta^4 = -\frac{b^4}{4} \text{ u. s. w.}$$

Es ist klar, dafs die Vorzeichen von Glied zu Glied wechseln, und im Nenner derselben nur die Exponenten der Potenzen von b übrig bleiben, so dafs sich ergiebt:

$$l(1+b) = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \frac{b^5}{5} - \ldots \text{ in inf.} \qquad (2)$$

Diese Reihe ist nur konvergent, wenn $b < 1$, höchstens $= 1$ ist. Man könnte aber allenfalls schon mit ihrer Hülfe eine Tabelle der natürlichen Logarithmen berechnen. Freilich ist die Berechnung von l 2, der sich ergiebt, wenn $b = 1$ gesetzt wird, höchst unbequem, allmählich aber wird die Reihe brauchbarer, wenn man, um nach einander l 3, l 5 u. s. w. zu erhalten, für b die Werte $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ u. s. w. substituiert. Besser aber verbindet man mit (2) eine Reihe für $l(1-b)$, welche man analog der ersteren erhält, wenn man beachtet, dafs

$$l(a-\delta) - la = -\frac{\delta}{a} \text{ ist.}$$

Nach unserer Methode ergiebt sich alsdann:

$$l(1-b) = -b - \frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} - \ldots \text{ in inf.} \qquad (3)$$

Die Reihe (2) ist somit auch für negative Werte von b richtig. (3) aber ist nur konvergent, wenn $b < 1$ ist. Durch Subtraktion der Gleichung (3) von (2) folgt dann die bekannte Progression:

$$l\frac{1+b}{1-b} = 2\left\{b + \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} + \ldots \text{ in inf.}\right\},$$

welche für kleine Werte von b sehr schnell konvergiert, und aus der ohne Mühe die natürlichen Logarithmen von 2, 3, 5, 7, 11 u. s. w. berechnet werden, wenn man für b nach einander $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{21}$ u. s. w. einsetzt.

Die Berechnung der vulgären Logarithmen für die Basis 10 nach dem Satze vom Modulus ist bekannt. Derselbe folgt übrigens auch aus unseren Reihenentwicklungen. Es ist nämlich, wenn der vulgäre Logarithmus von a mit log a bezeichnet wird:

$$\log(a+\delta) - \log a = \log\left(1+\frac{\delta}{a}\right),$$

oder wenn der:

$$\log\left(1+\frac{\delta}{a}\right) = z$$

gesetzt wird:

$$10^z = 1 + \frac{\delta}{a}.$$

Nun ist aber:

$$10 = e^{l10},$$

mithin:

$$e^{z \cdot l10} = 1 + \frac{\delta}{a},$$

oder:

$$z \cdot l\,10 \left\{ 1 + \frac{z \cdot 110}{2!} + \frac{z^2 \cdot 110^2}{3!} + \ldots \text{ in inf.} \right\} = \frac{\delta}{a}.$$

Da nun $\frac{\delta}{a}$ verschwindend klein ist, die Klammer der linken Seite aber gröfser als 1 ist, mufs $z \cdot l\,10$ verschwindend klein, mithin die Klammer links $= 1$, und:

$$z \cdot l\,10 = \frac{\delta}{a}, \quad \text{oder} \quad \log(a + \delta) - \log a = \frac{1}{l\,10} \cdot \frac{\delta}{a} \text{ sein.} \tag{4}$$

Man erhält also für $\log(1+b)$ abgesehen von dem konstanten Faktor $\frac{1}{l\,a}$ dieselbe Reihe wie für $l(1+b)$, so dafs:

$$\log(1+b) = \frac{l(1+b)}{l\,10}$$

wird. Satz vom Modulus.

Man hätte auch allgemeiner Reihen für $l(a+b)$ und $\log(a+b)$ entwickeln können, welche nach Potenzen von $\frac{b}{a}$ fortschreiten.

Setzt man in denselben $a = 1$, so ergeben sich wieder die obigen Resultate.

Unsere Betrachtung führt aber noch zu einem andern wichtigen Ergebnisse. Es ist:

$$\log(1+a) - \log a = \log\left(1 + \frac{1}{a}\right).$$

Setzt man:

$$\log(1+a) - \log a = d,$$

so wird:

$$e^{d \cdot l\,10} = 1 + \frac{1}{a},$$

oder:

$$d \cdot l\,10 \left\{ 1 + \frac{d \cdot 110}{2!} + \frac{d^2 \cdot 110^2}{3!} + \ldots \text{ in inf.} \right\} = \frac{1}{a}.$$

Ist nun a eine vierstellige ganze Zahl, so wird $\frac{1}{a}$ höchstens gleich 0,001, die Klammer der linken Seite ist aber gröfser als 1, folglich mufs $d \cdot l\,10 < \frac{1}{a}$. Daher ist die Klammer genau bis auf zwei Dezimalstellen gleich 1, und:

$$d \cdot l\,10 = \frac{1}{a}.$$

Versteht man ferner unter ε eine Zahl unter $1 = \frac{\alpha}{10} + \frac{\beta}{100}$, so erhält man umsomehr bis auf denselben Grad der Genauigkeit:

$$\{\log(a+\varepsilon) - \log a\}\, l\,10 = \frac{\varepsilon}{a}.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$\log(a+\varepsilon) - \log a = d \cdot \varepsilon,$$

d. h.:

$$\log(a+\varepsilon) = \log a + \frac{\alpha d}{10} + \frac{\beta d}{100}.$$

Hat man also eine Tabelle der Briggischen Logarithmen für alle vierstelligen Zahlen, berechnet bis auf 6 Dezimalstellen, so kann man durch proportionale Verteilung von d auch die Logarithmen aller sechsziffrigen Zahlen bis zu demselben Grade der Genauigkeit finden.

§ 7. Reihenentwicklung der Kreisfunktionen.

Hülfssatz. Ist die Differenz δ zweier Arcus verschwindend klein, so ist die Differenz ihrer Sinus gleich dem Produkte aus dem Arcus δ und dem Kosinus des kleineren Winkels.

Ferner ist die Differenz ihrer Kosinus gleich dem negativen Produkte aus δ und dem Sinus des kleineren Winkels.

Beweis:

$$\sin(a+\delta) - \sin\alpha = 2\sin\frac{\delta}{2}\cos\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right).$$

Da aber der Sinus eines verschwindend kleinen Winkels gleich dem Arcus desselben ist, und bis zu jedem beliebigen Grade der Genauigkeit $\alpha + \frac{\delta}{2} = \alpha$ wird, hat man in der That:

$$\sin(\alpha+\delta) - \sin\alpha = \delta\cos\alpha. \qquad (1)$$

Ebenso ist:

$$\cos(\alpha+\delta) - \cos\alpha = -2\sin\frac{\delta}{2}\sin\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right).$$

oder:

$$\cos(\alpha+\delta) - \cos\alpha = -\delta\sin\alpha. \qquad (2)$$

Entwicklung der Reihe für $\sin\alpha$. Man teile den Arcus α in eine sehr grofse Anzahl, n, gleicher Teile, deren jeder gleich δ sein mag, so dafs $n\delta = \alpha$ ist. Man kann alsdann identisch gleich setzen:

$$\sin\alpha = -\sin 0 + \sin\delta - \sin\delta + \sin 2\delta - \sin 3\delta + \sin 3\delta - \ldots$$
$$+ \sin(n-1)\delta - \sin(n-1)\delta + \sin\alpha,$$

denn $\sin 0 = 0$, und die folgenden Gliederpaare desgleichen.

Die Differenzen der rechten Seite lassen sich aber nach Hülfssatz (1) auch so zusammenziehen, dafs Glied 1 und 2, 3 und 4 u. s. w. zusammengefafst werden. Alsdann ergiebt sich:

$$\sin\alpha = \delta\cos 0 + \delta\cos\delta + \delta\cos 2\delta + \ldots + \delta\cos(n-1)\delta.$$

Die einzelnen Glieder der Reihe auf der rechten Seite stellen wieder die n Zunahmen dar, aus denen der Wert von $\sin\alpha$ sich aufbaut, wenn der Arcus gleichmäfsig um die unendlich kleinen Strecken δ bis zum Werte α anwächst. Prüft man die Natur jener Reihe, so ergeben sich beim Bilden der ersten Differenzenreihe nach dem Hülfssatze (1) folgende Unterschiede:

$$-\delta^2\sin 0,\quad -\delta^2\sin\delta,\quad -\delta^2\sin 2\delta,\quad -\delta^2\sin 3,\ -\ldots\quad -\delta^2\sin(n-2)\delta,$$

die zweite Differenzenreihe besteht aus folgenden Gröfsen:

$$-\delta^3\cos 0,\quad -\delta^3\cos\delta,\quad -\delta^3\cos 2\delta,\quad -\delta^3\cos 3\delta,\quad -\delta^4\cos 4\delta,\ -\ldots$$

die dritte Differenzenreihe liefert:

$$+\delta^4\sin 0,\quad +\delta^4\sin\delta,\quad +\delta^4\sin 2\delta,\ +\ldots$$

die vierte:

$$+\delta^5\cos 0,\quad +\delta^5\cos\delta,\quad +\delta^5\cos 2\delta,\ +\ldots$$

Diese Reihe ist aber, abgesehen von dem konstanten Faktor δ^4, dieselbe wie die ursprüngliche Reihe. Die Differenzenreihen sind also periodisch, und zwar so, dafs nach je vier von ihnen dieselben Unterschiede, nur mit δ^4 multipliziert, wiederkehren. Man erhält also nach der Summationsformel für arithmetische Reihen unendlicher Ordnung:

$$\sin\alpha = n\delta\cos 0 - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\delta^2\sin 0 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\delta^3\cos 0$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\delta^4\sin + \ldots \text{ in inf.}$$

Es wird nun wieder:

$$n\delta=\alpha;\quad \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{\alpha^2}{n^2}=\frac{1-\frac{1}{n}}{1\cdot 2}\alpha^2,$$

oder da n unendlich grofs sein sollte, $=\frac{\alpha^2}{1\cdot 2}$. Ebenso wird:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\delta^3=\frac{\alpha^3}{3!}\qquad \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\delta^4=\frac{\alpha^4}{4!}\text{ u. s. w. in inf.}$$

Beachtet man aber, dafs $\sin 0=0$ ist, so verschwinden alle geraden Glieder mit den geraden Potenzen von α, während in den ungeraden der Faktor $\cos 0=1$ die obigen Werte ungeändert läfst. Es ergiebt sich somit schliefslich die Gleichung:

$$\sin\alpha=\alpha-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}-\frac{\alpha^7}{7!}+\frac{\alpha^9}{9!}-\ldots\text{ in inf.},\qquad (3)$$

gleich einer zwar unendlichen, aber für jeden Arcus α konvergenten Reihe. Weiterhin wird gezeigt werden, dafs ihr absoluter Wert stets $\leqq 1$ ist.

In ähnlicher Weise kann man auch eine nach Potenzen von α fortschreitende Reihe für $\sin(\beta+\alpha)$ entwickeln, aus der sich die bekannte Formel:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

herleiten läfst.

Entwicklung der Reihe für $\cos\alpha$.

Unter der Voraussetzung, dafs n eine sehr grofse Zahl bedeutet, sei wieder $n\delta = \alpha$, also $\delta = \frac{\alpha}{n}$, eine verschwindend kleine Gröfse.

Man geht, entsprechend den früheren Entwicklungen, von der identisch richtigen Gleichung aus:

$$\cos\alpha - 1 = -1 + \cos\delta - \cos\delta + \cos 2\delta - \cos 3\delta + \cos 3\delta - \ldots - \cos(n-1)\delta + \cos\alpha.$$

Aus dieser Gleichung folgt nach Hülfsatz (2):

$$\cos\alpha - 1 = -\delta\sin 0 - \delta\sin\delta - \delta\sin 2\delta - \delta\sin 3\delta - \ldots - \delta\sin(n-1)\delta.$$

Die rechte Seite ist eine Reihe von n Gliedern, deren erste Differenzenreihe aus folgenden Gröfsen besteht:

$$-\delta^2\cos 0, \quad -\delta^2\cos\delta, \quad -\delta^2\cos 2\delta, \quad -\delta^2\cos 3\delta, -\ldots \quad -\delta^2\cos(n-2)\delta,$$

die zweite Differenzenreihe wird:

$$+\delta^3\sin 0, \quad +\delta^3\sin\delta, \quad +\delta^3\sin 2\delta, \quad +\delta^3\sin 3\delta, +\ldots \quad +\delta^3\sin(n-3)\delta,$$

die dritte:

$$+\delta^4\cos 0, \quad +\delta^4\cos\delta, \quad +\delta^4\cos 2\delta, \quad +\delta^4\cos 3\delta, +\ldots \quad +\delta^4\cos(n-4)\delta,$$

und endlich die vierte:

$$-\delta^5\sin 0, \quad -\delta^5\sin\delta, \quad -\delta^5\sin 2\delta. \quad -\delta^5\sin 3\delta, -\ldots \quad -\delta^5\sin(n-5)\delta.$$

Da diese Differenzenreihe wieder in die zu addierende Progression übergeht, wenn man den Faktor δ^4 in den einzelnen Gliedern fortläfst, müssen in gleicher Weise sich alle Differenzenreihen periodisch wiederholen. Die zu addierende Summe ist also eine arithmetische Progression unendlicher Ordnung. Durch Addition derselben erhält man die Gleichung:

$$\cos\alpha - 1 = -n\delta\sin 0 - \frac{n(n-1)}{2!}\delta^2\cos 0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\delta^3\sin 0$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\delta^4\cos 0 - \ldots \text{ in inf.}$$

Die Werte $n\delta$, $\frac{n(n-1)}{2!}\delta^2$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$ u. s. w. waren bereits oben bestimmt. Da aber $\sin 0 = 0$ ist, verschwinden alle ungeraden Glieder der rechten Seite mit den ungeraden Potenzen von α, und es ergiebt sich schliefslich:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \frac{\alpha^8}{8!} - \ldots \text{ in inf.} \qquad (4)$$

Auch diese Reihe ist für alle Werte von α konvergent. Da man ferner nach den Reduktionsformeln der Goniometrie nur die Funktionen der Winkel von 0° bis 45° zu kennen braucht, um ohne Schwierigkeit die aller Arcus von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erhalten, wird bei der Berechnung der goniometrischen Tafeln in (3) und (4) für α als höchster Wert $\frac{\pi}{4} = 0{,}78$ in Betracht kommen. Für diesen und alle kleineren Werte sind aber beide Reihen so schnell konvergent, dafs eine weitere Umgestaltung derselben nicht erforderlich ist. Es ist aber zu beachtend, dafs im Hülfssatze (1) δ, $= \frac{\alpha}{n}$, einen Arcus bedeutet, und somit unter α selbst die Länge des Arcus des Winkels und nicht etwa die Anzahl seiner Bogengrade zu verstehen ist. Bei der Ausführung der Rechnung übersehe man ferner nicht, dafs bei der Bestimmung jedes Gliedes der Wert des vorhergehenden benutzt werden kann.

Da Arcus $1' = 0{,}00029$ ist, stimmen bis auf 7 Dezimalstellen $\cos 1'$ mit 1 und $\sin 1'$ mit arc $1'$ überein. Man hat also, bis auf denselben Grad der Genauigkeit:

$$\sin(\alpha + 1') = \sin\alpha + \text{arc } 1' \cos\alpha, \quad \text{oder} \quad \sin(\alpha + 1') - \sin\alpha = \text{arc } 1' \cos\alpha = d.$$

Ebenso wird, wenn ε, der Bruchteil einer Minute, gleich $\frac{b'}{10} + \frac{c'}{100}$ ist,

$$\sin(\alpha + \varepsilon) = \sin\alpha + \text{arc } \varepsilon \cos\alpha, \quad \text{oder} \quad \sin(\alpha + \varepsilon) - \sin\alpha = \text{arc } \varepsilon \cos\alpha.$$

Durch Division beider Gleichungen folgt:

$$\frac{\sin(\alpha + \varepsilon) - \sin\alpha}{d} = \frac{\varepsilon}{1'} = \frac{b}{10} + \frac{c}{100},$$

oder:

$$\sin(\alpha + \varepsilon) = \sin\alpha + b \cdot \frac{d}{10} + c \cdot \frac{d}{100}.$$

Aus Tafeln, welche die Sinus der Arcus von Minute zu Minute enthalten, ergeben sich also auch die Sinus der dazwischen liegenden Arcus durch proportionale Verteilung der Tafeldifferenz d. Ebenso findet man:

$$\cos(\alpha + \varepsilon) = \cos\alpha - b \cdot \frac{d}{10} - c \cdot \frac{d}{100}.$$

Dasselbe proportionale Anwachsen bezw. Abnehmen gilt auch für die Logarithmen der Kreisfunktionen. Es ist:

$$\log\sin(\alpha + 1') - \log\sin\alpha = \log(1 + \text{arc } 1' \cot\alpha) = \frac{1}{\text{la}}\left(\text{arc } 1' \cot\alpha - \frac{\text{arc } 1'^2 \cot\alpha^2}{2} + \ldots \text{ in inf.}\right).$$

So weit also $\frac{\text{arc } 1'^2 \cot\alpha^2}{2}$ vernachlässigt werden kann, wird:

$$\log\sin(\alpha + 1') - \log\sin\alpha = d = \frac{\text{arc } 1' \cot\alpha}{1\,10}.$$

Ebenso ist:

$$\log \sin (\alpha + \varepsilon) - \log \sin \alpha = \frac{\operatorname{arc} \varepsilon \cot \alpha}{1\,10}.$$

Durch Division ergiebt sich:

$$\log \sin (\alpha + \varepsilon) = \log \sin \alpha + b \cdot \frac{d}{10} + c \cdot \frac{d}{100}.$$

Ebenso erhält man:

$$\log \cos (\alpha + \varepsilon) = \log \cos \alpha - b \cdot \frac{d}{10} - c \cdot \frac{d}{100},$$

wenn in jedem Falle d die entsprechende Tafeldifferenz bedeutet.

Aus $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ lassen sich die Quotienten dieser Funktionen, d. h. $\operatorname{tg} \alpha$ und $\cot \alpha$, durch Division berechnen, so dafs die Entwicklung derselben in nach Potenzen von α fortschreitenden Reihen übergangen werden kann.

§ 8. Über die Reihen:

$$\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \ldots \quad \text{und} \quad 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \ldots \text{ in inf.}$$

Im vorhergehenden Paragraphen waren wir, von der geometrischen Darstellung und den daraus folgenden Eigenschaften der Sinus und Cosinus ausgehend, zu ihrer Berechnung mit Hülfe der Reihen (3) und (4) gelangt. Es ist von Interesse umgekehrt, von diesen Reihen ausgehend, algebraisch die Eigenschaften derselben zu untersuchen und die Darstellung ihrer Werte als Mafszahlen von Strecken nachzuweisen.

Da beide Reihen Funktionen von α sind, wollen wir:

$$\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \ldots \text{ als } f(\alpha) \quad \text{und} \quad 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \ldots \text{ als } \varphi(\alpha)$$

bezeichnen. Man erhält alsdann:

$$f(\alpha)\,\varphi(\beta) = \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \ldots \text{ in inf.}\right)\left(1 - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} - \frac{\beta^6}{6!} + \frac{\beta^8}{8!} + \ldots \text{ in inf.}\right)$$

$$= \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \frac{\alpha^9}{9!} - \ldots$$

$$- \frac{\alpha}{1!}\frac{\beta^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!}\frac{\beta^2}{2!} - \frac{\alpha^5}{5!}\frac{\beta^2}{2!} + \frac{\alpha^7}{7!}\frac{\beta^2}{2!} - \ldots$$

$$+ \frac{\alpha}{1!}\frac{\beta^4}{4!} - \frac{\alpha^3}{3!}\frac{\beta^4}{4!} + \frac{\alpha^5}{5!}\frac{\beta^4}{4!} - \ldots$$

$$- \frac{\alpha}{1!}\frac{\beta^6}{6!} + \frac{\alpha^3}{3!}\frac{\beta^6}{6!} - \ldots$$

$$+ \frac{\alpha}{1!}\frac{\beta^8}{8!} - \ldots$$

Ebenso ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
f(\beta)\,\varphi(\alpha) = \beta &- \frac{\beta^3}{3!} &&+ \frac{\beta^5}{5!} &&- \frac{\beta^7}{7!} &&+ \frac{\beta^9}{9!} &&- \ldots \\
&- \frac{\beta}{1!}\frac{\alpha^2}{2!} &&+ \frac{\beta^3}{3!}\frac{\alpha^2}{2!} &&- \frac{\beta^5}{5!}\frac{\alpha^2}{2!} &&+ \frac{\beta^7}{7!}\frac{\alpha^2}{2!} &&- \ldots \\
&&&+ \frac{\beta}{1!}\frac{\alpha^4}{4!} &&- \frac{\beta^3}{3!}\frac{\alpha^4}{4!} &&+ \frac{\beta^5}{5!}\frac{\alpha^4}{4!} &&- \ldots \\
&&&&&- \frac{\beta}{1!}\frac{\alpha^6}{6!} &&+ \frac{\beta^3}{3!}\frac{\alpha^6}{6!} &&- \ldots \\
&&&&&&&+ \frac{\beta}{1!}\frac{\alpha^8}{8!} &&- \ldots \\
&&&&&&&&&- \ldots
\end{aligned}$$

Summiert man beide Gleichungen, indem man auf der rechten Seite die vertikalen Spalten addiert, so erhält man:

$$\begin{aligned}
f(\alpha)\,\varphi(\beta) + \varphi(\alpha)\,f(\beta) = \alpha + \beta
&- \left(\frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^2}{2!}\frac{\beta}{1!} + \frac{\alpha}{1!}\frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^3}{3!}\right) \\
&+ \frac{\alpha^5}{5!} + \frac{\alpha^4}{4!}\frac{\beta}{1!} + \frac{\alpha^3}{3!}\frac{\beta^2}{2!} + \frac{\alpha^2}{2!}\frac{\beta^3}{3!} + \frac{\alpha}{1!}\frac{\beta^4}{4!} + \frac{\beta^5}{5!} \\
&- \left(\frac{\alpha^7}{7!} + \frac{\alpha^6}{6!}\frac{\beta}{1!} + \frac{\alpha^5}{5!}\frac{\beta^2}{2!} - \frac{\alpha^4}{4!}\frac{\beta^3}{3!} + \frac{\alpha^3}{3!}\frac{\beta^4}{4!} + \frac{\alpha^2}{2!}\frac{\beta^5}{5!} + \frac{\alpha}{1!}\frac{\beta^6}{6!} + \frac{\beta^7}{7!}\right) \\
&+ \ldots \text{ in inf.}
\end{aligned}$$

Nach dem binomischen Lehrsatze § 1 (4) folgt hieraus:

$$f(\alpha)\,\varphi(\beta) + \varphi(\alpha)\,f(\beta) = \alpha + \beta - \frac{(\alpha+\beta)^3}{3!} + \frac{(\alpha+\beta)^5}{5!} - \frac{(\alpha+\beta)^7}{7!} + \ldots \text{ in inf.} \qquad (1)$$

Denn die Vorzeichen der einzelnen Spalten wechseln ab, und die pte Spalte hat den absoluten Wert:

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha^{2p-1}}{(2p-1)!} + \frac{\alpha^{2p-2}}{(2p-2)!}\frac{\beta}{1!} + \frac{\alpha^{2p-3}}{(2p-3)!}\frac{\beta^2}{2!} + \frac{\alpha^{2p-4}}{(2p-4)!}\frac{\beta^3}{3!} + \ldots \\
&\qquad + \frac{\alpha}{1!}\frac{\beta^{2p-1}}{(2p-1)!} + \frac{\beta^{2p-1}}{(2p-1)!} = \frac{(\alpha+\beta)^{2p-1}}{(2p-1)!}.
\end{aligned}$$

Die Gleichung (1) enthält die Grundeigenschaft unserer Reihen:

$$f(\alpha+\beta) = f(\alpha)\,\varphi(\beta) + \varphi(\alpha)\,f(\beta). \qquad (2)$$

Durch Subtraktion der obigen Produkte erhält man ebenso:

$$f(\alpha-\beta) = f(\alpha)\,\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)\,f(\beta). \qquad (3)$$

Es ist ferner:

$$\varphi(\alpha)\,\varphi(\beta) = \left(1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\frac{\alpha^6}{6!}+\frac{\alpha^8}{8!}-\ldots\right)\left(1-\frac{\beta^2}{2!}+\frac{\beta^4}{4!}-\frac{\beta^6}{6!}+\frac{\beta^8}{8!}-\ldots\right)$$

$$\begin{aligned}
&= 1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!} \quad -\frac{\alpha^6}{6!} \quad +\frac{\alpha^8}{8!} \quad -\ldots\\
&\quad -\frac{\beta^2}{2!}+\frac{\alpha^2}{2!}\frac{\beta^2}{2!}-\frac{\alpha^4}{4!}\frac{\beta^2}{2!}+\frac{\alpha^6}{6!}\frac{\beta^2}{2!}-\ldots\\
&\quad +\frac{\beta^4}{4!} \quad -\frac{\alpha^2}{2!}\frac{\beta^4}{4!}+\frac{\alpha^4}{4!}\frac{\beta^4}{4!}-\ldots\\
&\quad -\frac{\beta^6}{6!} \quad +\frac{\alpha^2}{2!}\frac{\beta^6}{6!}-\ldots\\
&\quad +\frac{\beta^8}{8!} \quad -\ldots
\end{aligned}$$

und:

$$\mathrm{f}(\alpha)\,\mathrm{f}(\beta) = \left(\alpha-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}-\frac{\alpha^7}{7!}+\ldots \text{ in inf.}\right)\left(\beta-\frac{\beta^3}{3!}+\frac{\beta^5}{5!}-\frac{\beta^7}{7!}+\ldots \text{ in inf.}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha}{1!}\frac{\beta}{1!}-\frac{\alpha^3}{3!}\frac{\beta}{1!}+\frac{\alpha^5}{5!}\frac{\beta}{1!}-\frac{\alpha^7}{7!}\frac{\beta}{1!}+\ldots\\
&\quad -\frac{\alpha}{1!}\frac{\beta^3}{3!}+\frac{\alpha^3}{3!}\frac{\beta^3}{3!}-\frac{\alpha^5}{5!}\frac{\beta^3}{3!}+\ldots\\
&\quad +\frac{\alpha}{1!}\frac{\beta^5}{5!}-\frac{\alpha^3}{3!}\frac{\beta^5}{5!}+\ldots\\
&\quad -\frac{\alpha}{1!}\frac{\beta^7}{7!}+\ldots
\end{aligned}$$

Subtrahiert man zunächst diese beiden Gleichungen von einander, indem man auf der rechten Seite wieder die Glieder der Vertikalspalten mit gleichen Dimensionen zusammenfafst, so folgt:

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha)\,\varphi(\beta) - \mathrm{f}(\alpha)\,\mathrm{f}(\beta) &= 1\\
&\quad -\left(\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha}{1!}\frac{\beta}{1!}+\frac{\beta^2}{2!}\right)\\
&\quad +\frac{\alpha^4}{4!}+\frac{\alpha^3}{3!}\frac{\beta}{1!}+\frac{\alpha^2}{2!}\frac{\beta^2}{2!}+\frac{\alpha}{1!}\frac{\beta^3}{3!}+\frac{\beta^4}{4!}\\
&\quad -\left(\frac{\alpha^6}{6!}+\frac{\alpha^5}{5!}\frac{\beta}{1!}+\frac{\alpha^4}{4!}\frac{\beta^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}\frac{\beta^3}{3!}+\frac{\alpha^2}{2!}\frac{\beta^4}{5!}+\frac{\alpha}{1!}\frac{\beta^5}{5!}+\frac{\beta^6}{6!}\right)\\
&\quad +\frac{\alpha^8}{8!}+\frac{\alpha^7}{7!}\frac{\beta}{1!}+\frac{\alpha^6}{6!}\frac{\beta^2}{2!}+\frac{\alpha^5}{5!}\frac{\beta^3}{3!}+\frac{\alpha^4}{4!}\frac{\beta^4}{4!}+\frac{\alpha^3}{3!}\frac{\beta^5}{5!}+\frac{\alpha^2}{2!}\frac{\beta^6}{6!}+\frac{\alpha}{1!}\frac{\beta^7}{7!}+\frac{\beta^8}{8!}\\
&\quad -\ldots \text{ in inf.}
\end{aligned}$$

Nach dem Binomial-Satze folgt daraus:

$$\varphi(\alpha)\,\varphi(\beta) - \mathfrak{f}(\alpha)\,\mathfrak{f}(\beta) = 1 - \frac{(\alpha+\beta)^2}{2!} + \frac{(\alpha+\beta)^4}{4!} - \frac{(\alpha+\beta)^6}{6!} + \frac{(\alpha+\beta)^8}{8!} - \dots \qquad (4)$$

Denn die allgemeine p te Vertikalreihe besteht aus den Gliedern:

$$\frac{\alpha^{2p-2}}{(2p-2)!} + \frac{\alpha^{2p-3}}{(2p-3)!}\,\frac{\beta}{1!} + \frac{\alpha^{2p-4}}{(2p-4)!}\,\frac{\beta^2}{2!} + \frac{\alpha^{2p-5}}{(2p-5)!}\,\frac{\beta^3}{3!} + \dots + \frac{\beta^{2p-2}}{(2p-2)!} = \frac{(\alpha+\beta)^{2p-2}}{(2p-2)!}.$$

Aus (4) folgt aber:

$$\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha)\,\varphi(\beta) - \mathfrak{f}(\alpha)\,\mathfrak{f}(\beta). \qquad (5)$$

Durch Addition der oben subtrahierten Gleichungen ergiebt sich ebenso:

$$\varphi(\alpha-\beta) = \varphi(\alpha)\,\varphi(\beta) + \mathfrak{f}(\alpha)\,\mathfrak{f}(\beta). \qquad (6)$$

Nimmt man in einem besonderen Falle an, dafs $\beta = \alpha$ ist, so folgt aus (6):

$$\varphi(\alpha)^2 + \mathfrak{f}(\alpha)^2 = \varphi(0) = 1. \qquad (7)$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, dafs die Werte beider Reihen $\varphi(\alpha)$ und $\mathfrak{f}(\alpha)$ den Wert ± 1 nicht überschreiten können, und dafs, wenn die eine $= 0$ wird, die andere gleich ± 1 sein mufs.

Man kann ferner die Werte von $\varphi(\alpha)$ und $\mathfrak{f}(\alpha)$ graphisch darstellen als Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Hypotenuse eine Länge gleich 1 hat.

Durch Quadrieren und Addieren der Reihen $\varphi(\alpha)$ und $\mathfrak{f}(\alpha)$ läfst sich dies Resultat auch direkt beweisen. Man erhält nämlich:

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha)^2 = 1 &- \frac{2\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{2!\,2!} \\
&+ \frac{2\alpha^4}{4!} - \frac{2\alpha^6}{2!\,4!} + \frac{\alpha^8}{4!\,4!} \\
&- \frac{2\alpha^6}{6!} + \frac{2\alpha^8}{2!\,6!} - \frac{2\alpha^{10}}{4!\,6!} + \frac{\alpha^{12}}{6!\,6!} \\
&+ \frac{2\alpha^8}{8!} - \frac{2\alpha^{10}}{2!\,8!} + \frac{2\alpha^{12}}{4!\,8!} - \frac{2\alpha^{14}}{6!\,8!} + \dots \\
&- \frac{2\alpha^{10}}{10!} + \frac{2\alpha^{12}}{2!\,10!} - \frac{2\alpha^{14}}{4!\,10!} + \dots \\
&+ \frac{2\alpha^{12}}{12!} - \frac{2\alpha^{14}}{2!\,12!} + \dots \\
&- \frac{2\alpha^{14}}{14!} + \dots
\end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(\alpha)^2 = {} & \frac{\alpha^2}{1!} - \frac{2\alpha^4}{3!} + \frac{\alpha^6}{3!\,3!} \\ & + \frac{2\alpha^6}{5!} - \frac{2\alpha^8}{3!\,5!} + \frac{2\alpha^{10}}{5!\,5!} \\ & - \frac{2\alpha^8}{7!} + \frac{2\alpha^{10}}{3!\,7!} - \frac{2\alpha^{12}}{5!\,7!} + \frac{\alpha^{14}}{7!\,7!} - \cdots \\ & + \frac{2\alpha^{10}}{9!} - \frac{2\alpha^{12}}{3!\,9!} + \frac{2\alpha^{14}}{5!\,9!} - \cdots \\ & - \frac{2\alpha^{12}}{11!} + \frac{2\alpha^{14}}{3!\,11!} - \cdots \\ & + \frac{2\alpha^{14}}{13!} - \cdots \end{aligned}$$

Aus dem binomischen Lehrsatze folgt, dafs sämtliche Vertikalspalten verschwinden. Betrachtet man z. B. die Koeffizienten von α^{10}, so kann man ihre Summe folgendermafsen schreiben:

$$-\frac{1}{10!} + \frac{1}{1!\,9!} - \frac{1}{2!\,8!} + \frac{1}{3!\,7!} - \frac{1}{4!\,6!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!\,4!} + \frac{1}{7!\,3!} - \frac{1}{8!\,2!} + \frac{1}{9!\,1!} - \frac{1}{10!}$$

$$= -\frac{(1-1)^{10}}{10!} = 0.$$

Allgemein ist der absolute Wert der Koeffizienten von α^{2p} der folgende:

$$\frac{1}{(2p)!} - \frac{1}{(2p-1)!\,1!} + \frac{1}{(2p-2)!\,2!} - \frac{1}{(2p-3)!\,3!} + \cdots - \frac{1}{1!\,(2p-1)!} + \frac{1}{(2p)!}$$

$$= \frac{(1-1)^{2p}}{(2p)!} = 0.$$

Es ist also in der That $\varphi(\alpha)^2 + \mathrm{f}(\alpha)^2 = 1$.

Andere interessante Beziehungen dieser Koeffizienten übergehen wir an dieser Stelle.

Aus den Formeln (2) und (3), (5) und (6) lassen sich weiter die den goniometrischen Multiplikations- und Divisionsformeln entsprechenden Gleichungen herleiten.

Subtrahiert man ferner (3) von (2), so folgt:

$$\mathrm{f}(\alpha' + \beta') - \mathrm{f}(\alpha' - \beta') = 2\varphi(\alpha')\,\mathrm{f}(\beta'),$$

oder, wenn $\alpha' = \frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\beta' = \frac{\alpha-\beta}{2}$ gesetzt wird:

$$\mathrm{f}(\alpha) - \mathrm{f}(\beta) = 2\,\mathrm{f}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Ebenso erhält man aus (5) und (6):

$$\varphi(\alpha) - \varphi(\beta) = -2\,\mathrm{f}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\mathrm{f}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Setzt man endlich, unter der Voraussetzung, dafs δ eine verschwindend kleine Gröfse ist, $\alpha = \alpha + \delta$ und $\beta = \alpha$, so gehen die letzten Gleichungen in die folgenden über:

$$f(\alpha+\delta) - f(\alpha) = \delta\,\varphi\left(\alpha+\frac{\delta}{2}\right) = \delta\,\varphi(\alpha),$$

oder nach (7):

$$f(\alpha+\delta) - f(\alpha) = \delta\sqrt{1-f(\alpha)^2}.$$

und:

$$\varphi(\alpha+\delta) - \varphi(\alpha) = -\delta\sqrt{1-\varphi(\alpha)^2}.$$

Es haben also die als $f(\alpha)$ und $\varphi(\alpha)$ bezeichneten Funktionen von α nicht nur dieselben Anfangswerte, wie die Mafszahlen der als $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ definierten Lote, sondern auch die Inkremente der Reihen sind dieselben wie die des sin und cos α, (1) und (2) § 7, wenn α um die Gröfse δ zunimmt. Somit fällt auch der Wert von $f(\alpha)$ mit $\sin\alpha$, und $\varphi(\alpha)$ mit $\cos\alpha$ zusammen, wenn α in $f(\alpha)$ und $\varphi(\alpha)$ als ein Arkus aufgefafst wird. In Übereinstimmung damit decken sich, wie Gleichungen (2) und (3), (5) und (6) zeigen, auch die Eigenschaften unserer Reihen mit denen der Kreisfunktionen. Die Periodizität der Reihen und ihre Beziehungen zu π sind ferner durch ihre graphische Darstellung bewiesen. Eine algebraische Herleitung wird bei der Betrachtung der Potenzen mit imaginären Exponenten gegeben werden.

§ 9. Entwicklung des Wertes von arc α in eine nach Potenzen von tg α fortschreitende Reihe.

Hülfssatz. Die Differenz ε der Arkus zweier Tangenten $(m+1)\,\delta$ und $m\,\delta$, welche sich nur durch die unendlich kleine Differenz δ unterscheiden, ist gleich dem Quotienten aus δ und dem um 1 vermehrten Quadrate einer der Tangenten, oder:

$$\varepsilon = \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = (m+1)\,\delta) - \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = m\,\delta) = \frac{\delta}{1+m^2\delta^2}. \qquad (1)$$

Beweis. Allgemein ist:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\varepsilon) - \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\varepsilon}{\cos(\alpha+\varepsilon)\cos\alpha}.$$

Wenn aber $\operatorname{tg}(\alpha+\varepsilon) - \operatorname{tg}\alpha$ verschwindend klein ist, mufs auch $\sin\varepsilon$ verschwindend klein und daher $= \varepsilon$ werden, während $\cos(\alpha+\varepsilon) = \cos\alpha$ gesetzt werden kann. Es wird also:

$$\varepsilon = (\operatorname{tg}(\alpha+\varepsilon) - \operatorname{tg}\alpha)\cos\alpha^2.$$

Ist nun die Differenz der Tangenten $= \delta$, so wird in der That:

$$\varepsilon = \delta\cos\alpha^2 = \frac{\delta}{1+\operatorname{tg}\alpha^2} = \frac{\delta}{1+m^2\delta^2}.$$

Derselbe Satz läfst sich auch geometrisch herleiten.

Es sei Winkel $BMA = \alpha$, der Radius MA des Bogens $AB = 1$ und $AT = \operatorname{tg}\alpha$. Man teile diese Strecke in eine unermefslich grofse Anzahl gleicher Teile, welche so klein sind, dafs $MC = MD$ gesetzt werden kann, wenn CD einer dieser Teile, δ, ist. Bezeichnet man endlich noch Winkel DMC mit ε, so erhält man aus dem Sinussatze:

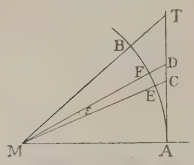


Fig. 1.

$$\frac{\sin\varepsilon}{\delta} = \frac{\sin MDA}{MC} = \frac{1}{MC \cdot MD} = \frac{1}{MC^2}.$$

Da δ verschwindend klein ist, mufs es auch $\sin\varepsilon$ sein, so dafs $\sin\varepsilon$ in ε oder EF übergeht. Es ist daher:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{MC^2}.$$

Ist aber CD der $m+1$te Teil von AT, also $MC = m\delta$, so erhält man nach dem Pythagoräischen Lehrsatze, wie oben:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{1 + m^2\delta^2}.$$

Um nun zur Entwicklung der Reihe für $\operatorname{arc}\alpha$ überzugehen, setze man die identisch richtige Gleichung an:

$$\operatorname{arc}(\operatorname{tg}\alpha) = -\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=0) + \operatorname{arc}(\operatorname{tg}=\delta) - \operatorname{arc}(\operatorname{tg}=\delta) + \operatorname{arc}(\operatorname{tg}=2\delta) - \operatorname{arc}(\operatorname{tg}=2\delta)$$
$$+ \operatorname{arc}(\operatorname{tg}=3\delta) - \ldots + \operatorname{arc}(\operatorname{tg}=(n-1)\delta) - \operatorname{arc}(\operatorname{tg}=(n-1)\delta) + \operatorname{arc}(\operatorname{tg}\alpha).$$

Nach dem Hülfssatze (1) folgt hieraus, wenn man die Differenzen der geraden Glieder und der vorhandenen ungeraden bildet:

$$\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=\alpha) = \delta + \frac{\delta}{1+\delta^2} + \frac{\delta}{1+4\delta^2} + \frac{\delta}{1+9\delta^2} + \ldots + \frac{\delta}{1+(n-1)^2\delta^2}. \qquad (2)$$

Die einzelnen Glieder dieser Reihe stellen die Inkremente dar, aus denen $\operatorname{arc}\alpha$ sich aufbaut, wenn man die Tangente stufenweise um das unendlich kleine δ wachsen läfst. Die rechte Seite von (2) ist eine Progression von n Gliedern, deren Differenzenreihen zunächst zu bestimmen sind. Zu diesem Zwecke mögen die einzelnen Summanden umgeformt werden.

Der $m+1$te derselben

$$\frac{\delta}{1+m^2\delta^2} = \delta\,(1+m^2\delta^2)^{-1}$$

ist nach dem Binomial-Satze $= \delta\,(1 - m^2\delta^2 + m^4\delta^4 - m^6\delta^6 + m^8\delta^8 - \ldots$ in inf.).

Die Glieder der zu addierenden Summe gehen also in folgende Reihen über:

δ
$\delta\,(1 - \delta^2 + \delta^4 - \delta^6 + \delta^8 - \ldots$ in inf.)
$\delta\,(1 - 4\delta^2 + 16\delta^4 - 64\delta^6 + 256\delta^8 - \ldots$ in inf.)
$\delta\,(1 - 9\delta^2 + 81\delta^4 - 729\delta^6 + 6561\delta^8 - \ldots$ in inf.)
$\delta\,(1 - 16\delta^2 + 256\delta^4 - 4096\delta^6 + 65536\delta^8 - \ldots$ in inf.) u. s. w.

Die erste Differenzenreihe beginnt daher mit folgenden Gliedern:

$$-\delta^3(1-\delta^2+\delta^4-\delta^6+\delta^8-\ldots \text{ in inf.})$$
$$-\delta^3(3-15\delta^2+63\delta^4-255\delta^6+\ldots \text{ in inf.})$$
$$-\delta^3(5-65\delta^2+665\delta^4-6305\delta^6+\ldots \text{ in inf.})$$
$$-\delta^3(7-175\delta^2+3367\delta^4-58975\delta^6+\ldots \text{ in inf.}) \text{ u. s. f.}$$

Die ersten Glieder der zweiten Differenzenreihe sind:

$$-\delta^3(2-14\delta^2+62\delta^4-254\delta^6+\ldots \text{ in inf.})$$
$$-\delta^3(2-50\delta^2+602\delta^4-6050\delta^6+\ldots \text{ in inf.})$$
$$-\delta^3(2-110\delta^2+2702\delta^4-52760\delta^6+\ldots \text{ in inf.}) \text{ u. s. w.}$$

Als dritte Differenzen findet man:

$$+\delta^5(36-540\delta^2+5796\delta^4-\ldots \text{ in inf.})$$
$$+\delta^5(60-2100\delta^2+46620\delta^4-\ldots \text{ in inf.}) \text{ u. s. w.}$$

Das erste Glied der vierten Differenzenreihe wird:

$$+\delta^5(24-1560\delta^2+40824\delta^4-\ldots \text{ in inf.})$$

Da alle weiteren Glieder dieser Differenzenreihe mit dem konstanten Summandus 24 beginnen, fällt derselbe in den folgenden, 5ten, Differenzen fort, und als erste derselben ergiebt sich:

$$-\delta^7(c-c'\delta^2+c''\delta^4-\ldots \text{ in inf.})$$

Nach dem Lehrsatze § 3 werden die pten Differenzen der pten Potenzen konstant, und zwar $=p!$, so dafs ihre $p+1$ten Differenzen verschwinden. Die sechste Differenzenreihe beginnt daher mit:

$$-\delta^7(6!-d\delta^2+\ldots),$$

und ebenso ist in allen folgenden Differenzen der erste Summandus in der Klammer konstant $=6!$. Bei dem Bilden weiterer Differenzen tritt in den beiden folgenden Reihen $+\delta^9$ heraus, während in den Gliedern der zweiten von ihnen das konstante Klammerglied $8!$ wird. Die beiden folgenden Reihen haben den Faktor $-\delta^{11}$ und in der zweiten von ihnen beginnt die Klammer mit der konstanten Gröfse $11!$ u. s. w. Die zu addierende Reihe für $\operatorname{arc}\alpha$ ist somit wieder eine arithmetische Progression unendlicher Ordnung, deren Differenzenreihen allerdings nicht periodisch wiederkehren, deren Bildungsgesetz aber aus dem Obigen folgt. Bei der Summation der arithmetischen Reihen kommen nun allein die Anfangsglieder der Differenzenreihen in Betracht, und in diesen können aufserdem die in der Klammer enthaltenen Potenzen von δ als verschwindend vernachlässigt werden. Für die in der Summenformel jener Progressionen enthaltenen Gröfsen a, b u. s. w. ergeben sich daher folgende Werte:

$$\delta,\ -\delta^3,\ -2!\,\delta^3,\ +36\delta^5,\ +4!\,\delta^5,\ -d\delta^7,\ -6!\,\delta^7+e\delta^9+8!\,\delta^9,\ -\ldots \text{ in inf.}$$

Nun ist aber das erste Glied der zu bildenden Summe:

$$n\,\delta = n\,\frac{\operatorname{tg}\alpha}{n} = \operatorname{tg}\alpha;$$

das zweite:

$$-\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}\,\frac{\operatorname{tg}\alpha^3}{n^3} = 0;$$

das dritte dagegen:

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{-2!\operatorname{tg}\alpha^3}{n^3} = -\frac{\operatorname{tg}\alpha^3}{3}.$$

Das vierte Glied, und ebenso sämtliche folgenden gerade, werden wieder $= 0$, da die hinzutretenden Binomial-Koeffizienten im Zähler immer einen Faktor weniger enthalten, als die zugehörige Potenz von δ oder $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{n}$ im Nenner. Dagegen wird das fünfte Glied:

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{5!}\cdot\delta^5\cdot 4! = \frac{+\operatorname{tg}\alpha^5}{5},$$

und allgemein der absolute Wert eines jeden ungeraden, pten,

$$= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-p+1)}{p!}\cdot\delta^p\,(p-1)! = \frac{\operatorname{tg}\alpha^p}{p}.$$

Die Vorzeichen dieser ungeraden Glieder wechseln aber ab. Man erhält daher schliefslich:

$$\operatorname{arc}\alpha = \operatorname{tg}\alpha - \frac{\operatorname{tg}\alpha^3}{3} + \frac{\operatorname{tg}\alpha^5}{5} - \frac{\operatorname{tg}\alpha^7}{7} + \frac{\operatorname{tg}\alpha^9}{9} - \ldots \text{ in inf.} \qquad (2)$$

Diese Reihe ist aber nur konvergent, wenn $\operatorname{tg}\alpha$ kleiner, oder höchstens gleich 1 ist. Setzt man für $\operatorname{tg}\alpha$ den Wert 1 ein, so wird $\alpha = 45°$, oder $\operatorname{arc}\alpha = \frac{\pi}{4}$, und man erhält die bekannte Leibnitzsche Reihe:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots \text{ in inf.}$$

Für die Berechnung von π ist diese, sehr langsam konvergierende, Progression allerdings wenig geeignet. Zweckmäfsiger würde es schon sein, $\operatorname{arc}\alpha = \frac{\pi}{60}$ zu setzen, da $\operatorname{tg} 3°$ eine verhältnismäfsig kleine Zahl ist, deren Potenzen schnell kleiner werden, und welche sich noch mit Hülfe einer endlichen Anzahl der sechs Species darstellen läfst. Noch kürzer gestaltet sich aber die Berechnung von π aus den Ergebnissen des folgenden Paragraphen, nach denen nur die Berechnung von $\sin 3°$ erforderlich ist.

§ 10. Reihe für arc α, welche nach Potenzen des $\sin\alpha$ fortschreitet.

Hülfssatz. Die Differenz ε zweier Arcus, deren Sinus sich nur durch eine unendlich kleine Gröfse δ von einander unterscheiden, ist gleich dem Quotienten aus δ und dem Cosinus desselben Bogens, d. h.:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\sqrt{1 - \sin\alpha^2}}.$$

Beweis:

$$\delta = \sin(\alpha + \varepsilon) - \sin\alpha = 2\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Da aber δ unendlich klein sein soll, so mufs auch $\sin\frac{\varepsilon}{2}$ verschwindend klein sein und in den Arcus ε übergehen. Es ergiebt sich daher:

$$\delta = \varepsilon \cdot \cos\alpha,$$

oder:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\cos\alpha} = \frac{\delta}{\sqrt{1 - \sin\alpha^2}}.$$

Ist der betreffende $\sin = m\delta$, so folgt daraus:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\sqrt{1 - m^2\delta^2}}. \tag{1}$$

Derselbe Satz läfst sich auch geometrisch folgendermafsen beweisen.

Es sei Fig. 2 der Radius MA des Bogens AB gleich 1. Das Lot BF = a, der Sinus desselben, sei in eine grofse Anzahl n gleicher Teile geteilt, deren jeder gleich $\frac{\sin\alpha}{n}$ gleich δ ist. CD sei einer derselben und zwar der m te. Zieht man alsdann die Parallelen CG und DH zu MA, welche das Bogenelement GH ausschneiden, so kann δ stets so klein gemacht werden, dafs GH als eine Gerade betrachtet werden kann. Die Verlängerung von GH ist dann eine Tangente des Kreises, somit senkrecht zu MG. Ihr Schnittpunkt mit der Verlängerung von MA heifse S, das von G auf MA gefällte Lot GJK. Es ist alsdann GJ = δ, und GH das zugehörige Inkrement des Bogens = ε. Da die rechtwinkligen Dreiecke JGH und GKM ähnlich sind, hat man ferner die Proportion:

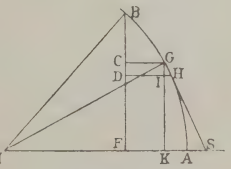


Fig. 2.

$$\frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{MG}{MK} = \frac{1}{MK},$$

oder

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\sqrt{1 - GK^2}} = \frac{\delta}{\sqrt{1 - m^2\delta^2}}.$$

Mit Hülfe dieses Satzes läfst sich arc α in eine Reihe, welche nach Potenzen von $\sin\alpha$ fortschreitet, entwickeln. Es ist offenbar identisch:

$$\arc\alpha = -\arc(\sin=0) + \arc(\sin=\delta) - \arc(\sin=\delta) + \arc(\sin=2\delta) - \arc(\sin=2\delta) + \arc(\sin=3\delta) \ldots + \arc(\sin=(n-1)\delta) - \arc(\sin=(n-1)\delta) + \arc\alpha.$$

Mit Hülfe von (1) erhält man aus der rechten Seite, wenn man die Differenz jedes geraden Gliedes und des vorhergehenden ungeraden bildet, die Gleichung:

$$\arc\alpha = \frac{\delta}{\sqrt{1}} + \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} + \frac{\delta}{\sqrt{1-4\delta^2}} + \frac{\delta}{\sqrt{1-9\delta^2}} + \frac{\delta}{\sqrt{1-16\delta^2}} + \ldots + \frac{\delta}{\sqrt{1-(n-1)^2\delta^2}}.$$

Die n Glieder der rechten Seite sind die Elemente, aus denen der Arkus α sich aufbaut, wenn der Sinus allmählich um die kleine Strecke δ von 0 bis $\sin\alpha$ wächst. Untersuchen wir die Progression in Beziehung auf ihre Differenzenreihen.

Entwickelt man zunächst das allgemeine m + 1te Glied mit Hülfe des Binomialsatzes nach Potenzen von δ, so erhält man:

$$\frac{\delta}{\sqrt{1-m^2\delta^2}} = \delta(1-m^2\delta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \delta\left(1 + \frac{1}{2}m^2\delta^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1\cdot2}m^4\delta^4 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1\cdot2\cdot3}m^6\delta^6 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{1\cdot2\cdot3\cdot4}m^8\delta^8 + \ldots \text{ in inf.}\right)$$

$$= \delta\left(1 + \frac{1}{2}m^2\delta^2 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}m^4\delta^4 + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}m^6\delta^6 + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}m^8\delta^8 + \ldots \text{ in inf.}\right).$$

Die Summanden der zu addierenden Reihe sind daher die folgenden:

δ

$$\delta\left(1 + \frac{1}{2}\quad\delta^2 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\quad\delta^4 + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\quad\delta^6 + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\quad\delta^8 + \ldots \text{ in inf.}\right)$$

$$\delta\left(1 + \frac{1}{2}\ 4\delta^2 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\ 16\delta^4 + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\ 64\delta^6 + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\ 256\delta^8 + \ldots \text{ in inf.}\right)$$

$$\delta\left(1 + \frac{1}{2}\ 9\delta^2 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\ 81\delta^4 + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\ 729\delta^6 + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\ 6561\delta^8 + \ldots \text{ in inf.}\right)$$

$$\delta\left(1 + \frac{1}{2}\,16\delta^2 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\,256\delta^4 + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\,4096\delta^6 + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\,65536\delta^8 + \ldots \text{ in inf.}\right) \text{ u. s. w.}$$

Daraus folgt für die Anfangsglieder der ersten Differenzenreihe:

$$\delta^3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\delta^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\delta^4 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\delta^6 + \ldots\right)$$

$$\delta^3\left(\frac{1}{2}\cdot3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\,15\delta^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\,63\delta^4 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\,265\delta^6 + \ldots\right)$$

$$\delta^3\left(\frac{1}{2}\cdot5 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\,65\delta^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\,665\delta^4 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\,6305\delta^6 + \ldots\right)$$

$$\delta^3\left(\frac{1}{2}\cdot7 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\,175\delta^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\,3367\delta^4 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\,58975\delta^6 + \ldots\right) \text{ u. s. w.}$$

Die zweite Differenzenreihe beginnt mit den Gliedern:

$$\delta^3\left(\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\,14\delta^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\,62\delta^4+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\,254\delta^6,\ldots\right)$$

$$\delta^3\left(\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\,50\delta^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\,602\delta^4+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\,6050\delta^6,\ldots\right)$$

$$\delta^3\left(\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\,110\delta^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\,2702\delta^4+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\,52670\delta^6,\ldots\right)\text{ u. s. w.}$$

Die dritte Differenzenreihe wird:

$$\delta^5\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot 36+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\,540\delta^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\,5796\delta^4,\ldots\right)$$

$$\delta^5\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot 60+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\,2100\delta^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\,46620\delta^4,\ldots\right).$$

Das Anfangsglied der vierten Differenzenreihe endlich ist:

$$\delta^5\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot 24+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\,1560\delta^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\,\delta^4,\ldots\right).$$

Da in dieser Folge der Differenzen das erste Glied in der Klammer $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot 24$ dasselbe ist, fällt es in den beiden folgenden Differenzenreihen fort, aus denen somit der Faktor δ^7 heraustritt, und zwar ist das erste Glied in der Klammer bei der fünften Differenzenreihe $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\,x$, wo x eine in den verschiedenen Differenzen wechselnden Wert bedeutet, während nach § 3 in der sechsten Differenzenreihe der erste Summandus der Klammern wieder konstant und zwar gleich $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot 6!$ wird.

Ganz ähnlich verhält es sich mit der siebenten und achten Differenzenreihe. In letzterer ist das konstante Anfangsglied $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot 8!$ u. s. w.

Es kommen hier wieder allein die Anfangsglieder der einzelnen Differenzenreihen in Betracht, in denen abermals die in den Klammern enthaltenen Potenzen von δ^2 als verschwindend übergangen werden können. Die mit a, b, c, d u. s. w. bezeichneten Koeffizienten der arithmetischen Reihe sind also in unserem Falle der Reihe nach:

$$\delta,\ \delta^3\cdot\frac{1}{2},\ \delta^3\,\frac{1}{2}\cdot 2!,\ \delta^5\,\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\,36,\ \delta^5\,\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\,4!,\ \delta^7\,\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\,c,\ \delta^7\,\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot 6!,$$

$$\delta^9\,\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\,d,\ \delta^9\,\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot 8!,\text{ u. s. w.}$$

Man sieht, wie das Entwicklungsgesetz der Anfangsglieder der Differenzenreihen sich gestaltet.

Bei der Summation der Reihe ist nun zu beachten, dafs die den geraden Differenzenreihen entsprechenden Glieder gleich 0 werden. Das zweite Glied $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\delta^3\cdot\frac{1}{2}$ z. B. mufs verschwinden, da für unendlich grofse n der Bruch $\frac{n(n-1)\sin\alpha^3}{4n^3}=0$ wird. Dasselbe gilt vom 4ten, 6ten Gliede u. s. w., da überall ein Faktor n im Nenner mehr enthalten ist, als im Zähler der Binomial-Koeffizienten hinzutritt.

Dagegen liefern die ungeraden Glieder endliche Werte.

Es ist nämlich:

$$n\cdot\delta = n\frac{\sin\alpha}{n} = \sin\alpha,$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\delta^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\frac{\sin\alpha^3}{n^3} = \frac{1}{2}\frac{\sin\alpha^3}{3},$$

ferner:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}4!\frac{\sin\alpha^5}{n^5} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\frac{\sin\alpha^5}{5},$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{7!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}6!\frac{\sin\alpha^7}{n^7} = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\sin\alpha^7}{7}\text{ u. s. f.}$$

Die gesuchte Reihe ist somit die folgende:

$$\text{arc}\,\alpha = \sin\alpha + \frac{1}{2}\frac{\sin\alpha^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\frac{\sin\alpha^5}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\frac{\sin\alpha^7}{7} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\frac{\sin\alpha^9}{9} + \ldots \text{ in inf.} \quad (2)$$

Dieselbe ist nur konvergent, wenn der absolute Wert von $\sin\alpha$ kleiner als 1 ist, eine Bedingung, welche für alle Arkus zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ zutrifft. Im übrigen konvergiert die Reihe um so schneller, je kleiner $\sin\alpha$ ist.

Eine nach Potenzen des Cosinus fortschreitende Progression erhält man, wenn für α das Komplement $\frac{\pi}{2}-\alpha$ substituiert wird. Neue Beziehungen bietet dieselbe aber nicht.

§ 11. Berechnung der Zahl π bis auf zehn Dezimalstellen.

Das Bedürfnis die Zahl π zu berechnen macht sich naturgemäfs schon bei der Kreislehre geltend, wo diese Zahl entweder als Länge des Halbkreises mit dem Radius 1 oder als Flächeninhalt des Kreises mit demselben Halbmesser bestimmt wird. Da sich aber die Rechnung mit Hülfe der Arcus-Reihe des vorigen Paragraphen mit geringerem Zahlenaufwande vollzieht, ist es vielleicht nicht ohne Interesse das gesamte Rechnungsschema zusammenzustellen, soweit es zur Darstellung von π bis auf 10 Dezimalstellen nötig ist.

Wir gehen von der Berechnung des $\sin 3°$ aus, der sich bekanntlich mit Hülfe der sechs Spezies bestimmen läfst.

Es ist:

$$\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1).$$

Ferner:

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30°$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1).$$

Endlich wird:

$$\sin 3° = \sin(18° - 15°) = \sin 18° \cos 15° - \cos 18° \sin 15°$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) - \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$$

$$= \frac{1}{16}\sqrt{2}\{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{3} + 1) - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}(\sqrt{3} - 1)\}.$$

Nun ist:

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562374. \qquad \sqrt{3} = 1{,}732050807569.$$

$$\sqrt{5} = 2{,}236067977500. \qquad \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{14{,}472135955000} = 3{,}804226065181.$$

4		9	
100 : 42		547 : 68	
84		544	
1600 : 443		32135 : 7604	
1329		30416	
27100 : 4466		171995 : 76082	
26796		152164	
3040000 : 447206		1983150 : 760842	
2683236		1521684	
35676400 : 4472127		46146600 : 7608446	
31304889		45650676	
4371511 : 4472134		495924 : 7608457	
4024921		456507	
346590		39417	
313049		38042	
33541		1375	
31305		761	
2236		614	
2236		608	
		6	

$(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1) = 2{,}732050807569 \cdot 1{,}236067977500.$

2,732050807569
546410161514
81961524227
16392304845
163923048
19124356
2458845
191244
19124
1366

3,377000516138.

$(\sqrt[2]{3}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 0{,}732050807569 \cdot 3{,}804226065181.$

2,196152422707
585640646055
2928203230
146410161
14641016
4392305
43923
3660
73
58
1

2,784886763189.

$\sin 3^\circ = 0{,}0059211375295 \quad 8{,}83883476484.$

0,047369100236
4736910023
177634126
47369100
4736910
177634
23684
4145
355
24
5

$\sin 3^\circ = 0{,}052335956241.$

$\sin 3^{\circ 2} = 0{,}0005233595624 \quad 5{,}2335956242.$

0,002616797812
104671912
15700787
1570079
261680
47102
2617
314
12

0,002739052315.

$$\sin 3^{\circ 3} = 0{,}0000273905231 \cdot 5{,}233595624.$$

$$\begin{array}{r} 0{,}000136952616 \\ 5478105 \\ 821716 \\ 82172 \\ 13695 \\ 2465 \\ 137 \\ 16 \\ \hline 0{,}000143350922. \end{array}$$

$$\frac{1}{2}\sin 3^{\circ 3} = 0{,}000071675461.$$

$$\frac{1}{2}\sin \alpha^5 = 0{,}0000000716754 \quad 2{,}73905.$$

$$\begin{array}{r} 143351 \\ 50173 \\ 2150 \\ 644 \\ 4 \\ \hline 0{,}000000196322. \end{array}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\sin \alpha^5 = 0{,}000000147241.$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\sin \alpha^7 = 0{,}0000000001472 \cdot 2{,}739.$$

$$\begin{array}{r} 294 \\ 103 \\ 4 \\ 1 \\ \hline 402. \end{array}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\sin \alpha^7 = 0{,}000000000335.$$

Es ist daher:

$$\sin 3^\circ = 0{,}052335956242,$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sin 3^{\circ 3}}{3} = 0{,}000023891820,$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\,\frac{\sin 3^{\circ 5}}{5} = 0{,}000000029448,$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\,\frac{\sin 3^{\circ 7}}{7} = 0{,}000000000048.$$

Somit ergiebt sich:

$$\frac{\pi}{60} = 0{,}052359877558$$

oder:

$$\pi = 3{,}1415926535.$$

§ 12. Die Taylorsche und Maclaurinsche Formel.

Eine Gröfse y, welche in der Weise von einer andern, x, abhängig ist, dafs ihr Wert bestimmt ist, wenn der der zweiten gegeben ist, welche also zugleich mit x sich ändert und konstant bleibt, ist eine Funktion von x und wird mit $f(x)$ bezeichnet. Dies ist besonders der Fall, wenn y als mathematischer Ausdruck von x und etwaigen konstanten Gröfsen dargestellt werden kann.

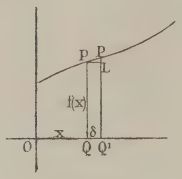


Fig. 3.

Man kann jede Funktion von x graphisch darstellen, indem man auf einem Koordinatenkreuze die unabhängig Veränderliche x als Abscisse OQ abträgt, und den zugehörigen Wert von y als Ordinate QP konstruiert. Jedes zusammengehörige Wertpaar von x und y bestimmt somit die Lage eines Punktes P, und die unendliche Reihe der sich stetig ändernden Wertpaare eine stetige Reihe von Punkten. Der Ort derselben ist eine im allgemeinen krumme Linie, deren Verlauf die Änderungen der Funktion unmittelbar veranschaulicht.

Hülfssatz. Die Differenz zweier Werte einer Funktion, in welchen das zugehörige x sich nur durch eine unendlich kleine Differenz δ unterscheidet, ist gleich dem Produkte aus δ und einer zweiten von $f(x)$ abhängigen und durch dieselbe bestimmten Funktion von x, welche die abgeleitete Funktion genannt und mit $f^I(x)$ bezeichnet wird.

Beweis. Es sei, Fig. 3, $OQ = x$, $PQ = y = f(x)$. Wächst OQ um $QQ^1 = \delta$, so ist $Q^1P^1 = f(x+\delta)$. Fällt man ferner von P das Lot PL auf Q^1P^1, so wird $LP^1 = f(x+\delta) - f(x)$, und aus dem rechtwinkeligen Dreiecke P^1PL ergiebt sich:

$$f(x+\delta) - f(x) = \delta \operatorname{tg} P^1PL.$$

Ist aber δ so klein, dafs Bogen PP^1 als geradlinig betrachtet werden kann, so ist seine Verlängerung die geometrische Tangente, welche im Punkte P der Kurve $y = f(x)$ an dieselbe gelegt werden kann. Winkel P^1PL giebt aber die Richtung dieser Tangente zur positiven Axe der x an und ist in jedem Punkte P durch $f(x)$ bestimmt. Bezeichnet man daher seine goniometrische Tangente mit $f^I(x)$ so ergiebt sich:

$$f(x+\delta) - f(x) = \delta f^I(x).$$

Die Differentialrechnung giebt allgemeinere Methoden die abgeleitete Funktion $f^I(x)$ zu bestimmen. In den vorhergehenden Paragraphen haben wir aber dieselbe in verschiedenen besonderen Fällen bestimmt. Für die Kurve $y = x^n$ ist z. B. nach (1) § 1:

$$f^I(x) = n x^{n-1}.$$

Ist ferner:

$$y = l(x),$$

so wird:

$$f^I(x) = \frac{1}{x} \quad (\S\ 6).$$

Für $y = \sin x$ ergab sich $f^I(x) = \cos x$ (§ 7), und für $y = \cos x$ erhält man $f^I(x) = -\sin x$ u. s. w.

Es lassen sich aber noch andere Fälle denken, in denen sich $f^I(x)$ durch elementare Betrachtungen darstellen läfst.

Ist z. B. $f(x)$ als eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe, welche auch unendlich sein kann, gegeben, und sind g_0, g_1, g_2 u. s. w. ihre Koeffizienten, so dafs

$$y = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3 + \ldots = f(x) \qquad (2)$$

wird, so erhält man:

$$f^I(x) = g_1 + 2g_2 x + 3g_3 x^2 + 4g_4 x^3 + \ldots$$

Man kann nun weiter, von $f^I(x)$ als der ursprünglichen Funktion ausgehend, auch ihre abgeleitete Funktion $f^{II}(x)$ bestimmen. In den zweiten Differenzenreihen der vorhergehenden Paragraphen ist auch diese Aufgabe für die dort behandelten Funktionen bereits gelöst. In dem zuletzt berührten Falle war:

$$f^I(x) = g_1 + 2g_2 x + 3g_3 x^2 + 4g_4 x^3 + \ldots$$

Man findet aus dieser Gleichung:

$$f^{II}(x) = 2g_2 + 2 \cdot 3 g_3 x + 3 \cdot 4 g_4 x^2 + \ldots$$

Fährt man in dieser Weise fort, so ergiebt sich:

$$f^{III}(x) = 2 \cdot 3 g_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 g_4 x + 3 \cdot 4 \cdot 5 g_5 x^2 + \ldots \text{ u. s. w.}$$

Es ist übrigens leicht zu beweisen, dafs, wenn die Reihe $f(x)$ (2) konvergent ist, auch die für die abgeleiteten Funktionen entwickelten Reihen meist konvergent sind.

Die Taylorsche Reihe. Es soll eine beliebige Funktion $f(x+h)$ nach Potenzen von h entwickelt werden.

Man teile h in eine unendlich grofse Anzahl n von gleichen Teilen, deren jeder $= \delta$ sein mag, so dafs $n\delta = h$ ist. Man kann darauf die identisch richtige Gleichung ansetzen:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) = &- f(x) + f(x+\delta) - f(x+\delta) + f(x+2\delta) - f(x+2\delta) + f(x+3\delta) - \ldots \\ &+ f(x+(n-1)\delta) - f(x+(n-1)\delta) + f(x+h). \end{aligned}$$

Nach dem obigen Hülfssatze lassen sich auf der rechten Seite die Differenzen der geraden Glieder und der vorhergehenden ungeraden bilden, und man erhält:

$$f(x+h) - f(x) = \delta f^I(x) + \delta f^I(x+\delta) + \delta f^I(x+2\delta) + \delta f^I(x+3\delta) + \ldots \delta f^I(x+(n-1)\delta). \qquad (3)$$

Die Reihe der rechten Seite, welche n Glieder enthält, ist zu untersuchen. Die erste Differenzenreihe wird die folgende:

$$\delta^2 f^{II}(x),\ \delta^2 f^{II}(x+\delta),\ \delta^2 f^{II}(x+2\delta),\ \delta^2 f^{II}(x+3\delta),\ \delta^2 f^{II}(x+4\delta),\ \ldots$$

Die zweiten Differenzen beginnen mit folgenden Ausdrücken:

$$\delta^3 f^{III}(x),\ \delta^3 f^{III}(x+\delta),\ \delta^3 f^{III}(x+2\delta),\ \delta^3 f^{III}(x+3\delta),\ \ldots$$

die dritten mit:

$$\delta^4 f^{IV}(x),\ \delta^4 f^{IV}(x+\delta),\ \delta^4 f^{IV}(x+2\delta),\ \delta^4 f^{IV}(x+3\delta),\ \ldots$$

Die obige Reihe (3) ist somit eine arithmetische Progression pter Ordnung, wenn die Glieder der pten Differenzenreihe konstant werden. In allen andern Fällen ist ihre Ordnung eine unendliche. Es ergiebt sich daher:

$$f(x+h) - f(x) = n\,\delta f^{I}(x) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\delta^2 f^{II}(x) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\delta^3 f^{III}(x) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\delta^4 f^{IV}(x) + \ldots$$

Nun ist aber $n\delta = h$, $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\delta^2 = \frac{h^2}{2!}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\delta^3 = \frac{h^3}{3!}$, u. s. w., so dafs sich schliefslich die bekannte Taylorsche Reihe ergiebt:

$$f(x+h) = f(x) + h\,f^{I}(x) + \frac{h^2}{2!}f^{II}(x) + \frac{h^3}{3!}f^{III}(x) + \ldots$$

Dehnt sich die rechte Seite in das Unendliche aus, so ist sie natürlich auf ihre Konvergenz zu untersuchen.

Der binomische Lehrsatz ist nur ein besonderer Fall der Taylorschen Formel. Ist nämlich $f(x+h) = (x+h)^p$, so geht die rechte Seite, da $f(x) = x^p$, $f^{I}(x) = p\,x^{p-1}$, $f^{II}(x) = p\,(p-1)\,x^{p-2}$ u. s. w. wird, ohne weiteres in

$$x^p + p\,x^{p-1}h + \frac{p(p-1)}{2!}x^{p-2}h^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^{p-3}h^3 \text{ u. s. w. über.}$$

Es hat die Taylorsche Reihe die Bedeutung eines allgemeinen Summentheorems. Auch die Formel für $\sin(x+h)$ ist darin enthalten. Man erhält nämlich:

$$\sin(x+h) = \sin x + h\cos x - \frac{h^2}{2!}\sin x - \frac{h^3}{3!}\cos x + \frac{h^4}{4!}\sin x + \frac{h^5}{5!}\cos x - \frac{h^6}{6!}\sin x - \ldots \text{ in inf.}$$

$$= \sin x\left(1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \frac{h^6}{6!} + \ldots \text{ in inf.}\right) + \cos x\left(h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \frac{h^7}{7!} + \ldots \text{ in inf.}\right)$$

$$= \sin x\cos h + \cos x\sin h.$$

Ist $f(x)$ in Form der Gleichung (2) gegeben, so erscheinen auch alle abgeleiteten Funktionen als unendliche nach Potenzen von x fortschreitende Reihen. Das Ergebnis der allgemeinen Entwicklung läfst sich aber in vielen Fällen vereinfachen.

Die Maclaurinsche Formel.

Nimmt man in der Taylorschen Formel $x = 0$ an, so ergiebt sich die Maclaurinsche Reihe:

$$f(h) = f(o) + h\,f^{I}(o) + \frac{h^2}{2!}f^{II}(o) + \frac{h^3}{3!}f^{III}(o) + \ldots$$

Oder, wenn man das beliebig veränderliche h durch x ersetzt:

$$f(x) = f(o) + x\,f^{I}(o) + \frac{x^2}{2!}f^{II}(o) + \frac{x^3}{3!}f^{III}(o) + \ldots \qquad (5)$$

Man kann nach dieser Formel jede Funktion von x entwickeln, wenn man nur ihren Anfangswert f(o) kennt, und aufserdem die abgeleiteten Funktionen, oder wenigstens die Anfangswerte derselben gegeben sind.

Bei dem Sinus ist z. B. $f(o) = 0$, $f^{I}(o) = 1$, $f^{II}(o) = 0$, $f^{III}(o) = -1$ u. s. w., so dafs als besonderer Fall in (5) die bekannte Reihe enthalten ist:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots$$

Ebenso ergeben sich die andern in den vorhergehenden Paragraphen behandelten Funktionen.

Zur Prüfung der Richtigkeit der Formel kann man sie auf den oben erwähnten Fall anwenden, in welchem f(x) gegeben war $= g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \ldots$ Es war alsdann:

$$f(o) = g_0,\ f^{I}(o) = g_1,\ f^{II}(o) = g_2 \cdot 2!,\ f^{III}(o) = g_3 \cdot 3!$$

Setzt man diese Werte in (5) ein, so ergiebt sich in der That wieder:

$$f(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + g^3 x_3 + \ldots$$

Es könnte befremden, dafs durch die Maclaurinschen Reihe f(x) in seinem ganzen Verlaufe nur durch die Anfangswerte der Funktion und ihrer Ableitungen bestimmt ist. Es darf aber nicht übersehen werden, dafs bei Bestimmung der letzteren nicht nur der dem Werte $x = 0$ entsprechende Anfangspunkt der Kurve $y = f(x)$, sondern eine ganze Reihe, wenngleich unendlich naher, Punkte in Betracht kommt.

Eine an die Reihen für e^{α}, $\sin \alpha$ u. s. w. sich anlehnende Betrachtung der Potenzen mit imaginären Exponenten soll bei nächster Gelegenheit veröffentlicht werden.

Druck von W. Pormetter in Berlin.